



TITLE:

# 条件付き最小楕円と多クラス判別への応用(モデリングと最適化の理論)

AUTHOR(S):

後藤, 順哉; 武田, 朗子

---

CITATION:

後藤, 順哉 ...[et al]. 条件付き最小楕円と多クラス判別への応用(モデリングと最適化の理論). 数理解析研究所講究録 2006, 1526: 129-136

ISSUE DATE:

2006-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58868>

RIGHT:

## 条件付き最小楕円と多クラス判別への応用

筑波大学 システム情報工学研究科 後藤 順哉(Jun-ya GOTOH)  
Graduate School of Systems and Information Engineering,  
University of Tsukuba

東京工業大学 情報理工学研究科 武田 朗子(Akiko TAKEDA)  
Graduate School of Information Science and Engineering,  
Tokyo Institute of Technology

### 1. はじめに

本稿では、最小包囲楕円問題に1つのパラメータを導入して拡張した [4] の結果をまとめて記すことを目的とする。

一般に、 $n$  次元実数空間における楕円体は、 $n \times n$  実対称正定値行列  $Q$ 、および  $n$  次元実ベクトル  $\gamma$  によって、

$$E(Q, \gamma) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|Qx - \gamma\|^2 \leq n\} \quad (1)$$

と表すことができる。特に、上式の等号を満たす点の集合は楕円の境界面を形成することに注意しておく。ちなみに、中心(位置)ベクトル  $c \in \mathbb{R}^n$ 、および形状行列  $D$  を用いた、

$$\hat{E}(D, c) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - c, D(x - c) \rangle \leq n\}$$

という表現もよく用いられるが、 $D = Q^2$ 、 $c = Q^{-1}\gamma$  なる変数変換を経ることで、2つの表現は互いに行き来が可能である。後に前者を用いることで対象とする問題が凸計画問題となることから、以下では (1) によって統一して楕円を表記する。

$\mathbb{R}^n$  上の点集合  $X := \{x^1, \dots, x^m\}$  が与えられたとき、これらから  $n$  次元楕円  $E(Q, \gamma)$  を求める問題は様々な文脈で現れる。有名で重要な例を3つ、以下に紹介しよう。

**例1) 最小包囲楕円問題**  $X \subset \mathbb{R}^n$  が与えられたとき、これら全てをその内側に含み、かつ最小体積を持った楕円を求める問題は、最小包囲楕円問題と呼ばれる。この問題は比較的歴史が古く、実験計画、計算幾何、ロバスト統計など、多数の異なる文脈において現れる問題である。

既述の楕円表現 (1) を用いれば、 $X$  の最小包囲楕円は、以下の最適化問題の解  $(Q^*, \gamma^*)$  によって、 $E(Q^*, \gamma^*)$  として与えられる：

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\ln \det [Q] \\ Q \succ 0, \gamma & \\ \text{subject to} & \|Qx^i - \gamma\|^2 \leq n, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $Q \succ 0$  は実対称行列  $Q$  が正定値であることを、 $\det[\cdot]$  は行列式を表すものとする。

ここで定式化 (2) の意味を簡単に説明しておこう。まず、 $m$  本の制約は、所与の  $m$  個のデータ点が全て楕円  $E(Q, \gamma)$  に含まれることを要請したものである。一方、目的関数は、楕円  $E(Q, \gamma)$  の体積が

$$\frac{(n\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \frac{1}{\det[Q]}$$

で与えられること(および、対数関数の単調性)から、体積の最小化を表したものである( $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数)。問題 (2) は、いわゆる凸計画問題であり、多くのアルゴリズムが提案されている(既存研究のリストについては [7] などの参考文献欄を、問題の凸性については [2] などを参照されたい)。

**例 2) MVE 推定問題** 最小包囲楕円問題を一般化した問題で、ある一定以下個数以下の点を含む楕円の形で最小体積を持つものを求める問題はロバスト統計の分野で MVE 推定として知られる:

$$(MVE(\beta)) \left\{ \begin{array}{ll} \underset{Q, \gamma}{\text{minimize}} & -\ln \det [Q] \\ \text{subject to} & |\{i \in I : \|Qx^i - \gamma\|^2 \leq n\}| \geq [\beta m], \\ & Q \succ O. \end{array} \right. \quad (3)$$

ただし、 $[w]$  は  $w$  を下回らない最小の整数、 $\beta \leq 0.5$ . この問題によって得られた楕円の位置ベクトルや形状行列は外れ値の影響を受けにくいとされ、平均ベクトルや分散共分散行列の代替物として利用される. 一般に問題 (3) は非凸な制約領域となり、厳密解法の構築は難しい問題となる.

**例 3) 楕円分布のパラメータ推定問題**  $X$  が  $n$  次元楕円分布に従うサンプル・データであるとき、これらから未知のパラメータを推定し、元の分布形を推定する問題も集合  $X$  と楕円を結びつける問題であると言える. ここで、楕円分布とは  $p(x) := \kappa \det[Q] q(\|Qx - \gamma\|^2)$  なる密度関数を持つ分布である (ただし、 $\kappa > 0$  は定数、 $q$  は  $\mathbb{R}$  上の関数). この問題が楕円と結びつくのは、楕円分布の密度関数の等高線が、(その名が示す通り) 楕円を与えるからである. これらのパラメータ  $(Q, \gamma)$  を推定する方法についてはいくつもあろうが、最も有名なものは最尤推定法であろう.

楕円分布の最も有名な例は正規分布  $N(\mu, \Sigma)$  であり、 $X$  に対するこの方法は以下の最大化問題として定式化される (たとえば、[9] など):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{\Sigma \succ O, \mu}{\text{maximize}} & -m \ln \det[\Sigma] - \sum_{i=1}^m \langle x^i - \mu, \Sigma^{-1}(x^i - \mu) \rangle. \end{array} \right.$$

この問題はデータ  $X$  が、ある同一の正規分布から独立にサンプリングされたものと仮定して、尤度  $\prod_{i=1}^m \exp\{-(x^i - \mu)^T \Sigma^{-1}(x^i - \mu)/2\} / \sqrt{(2\pi)^n \det[\Sigma]}$  を最大にするパラメータ  $(\Sigma, \mu)$  を求めるという発想に基づいている. よく知られているように、この問題は (適当な仮定の下で) 陽に解くことができ、その解  $(\Sigma^*, \mu^*)$  は以下のように与えられる:

$$\Sigma^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^i - \bar{x})(x^i - \bar{x})^T; \quad \mu^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^i =: \bar{x}.$$

冒頭に記した楕円表記法の差異を考慮すれば、この正規尤度最大化問題は以下のように表すことが出来ることに注意しよう:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{Q \succ O, \gamma}{\text{maximize}} & m \ln \det[Q] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|Qx^i - \gamma\|^2. \end{array} \right. \quad (4)$$

また、その解  $(Q^*, \gamma^*)$  は

$$Q^* = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^i - \bar{x})(x^i - \bar{x})^T \right)^{-1}; \quad \gamma^* = Q^* \bar{x} \quad (5)$$

と表すことができる.

このように、データ集合  $X \subset \mathbb{R}^n$  から楕円  $E(Q, \gamma)$  を構築する問題には (これらの他にも) 基本的で重要な問題が含まれる. 本稿では、金融工学でよく知られた CVaR (Conditional Value-at-Risk) 最小化のテクニック ([5]) を援用することで、例 1 で示した最小包囲楕円問題を拡張した、楕円構築問題の新しい定式化を提示し、その含意、および、領域判別の問題を含む、いくつかの定式化との関連について指摘する. とりわけ、例 3 に示した正規尤度最大化に対しても最小楕円の文脈から幾何的な意味づけを与えられることを示し、その事実の応用として、多クラス判別問題への応用を試みる. なお、議論の詳細については [4] を参照のこと.

## 2. 条件付き最小楕円問題

### 2.1 問題の定式化

まず, 以下の最適化問題を導入しよう:

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\ln \det [\mathbf{Q}] \\ \mathbf{Q} \succ \mathbf{0}, \gamma, \alpha \\ \text{subject to} & F_\beta(\mathbf{Q}, \gamma, \alpha) \leq n. \end{cases} \quad (6)$$

ただし,  $\beta \in [0, 1)$  とし, 制約式左辺は

$$F_\beta(\mathbf{Q}, \gamma, \alpha) := \alpha + \frac{1}{(1-\beta)m} \sum_{i=1}^m [\|\mathbf{Q}\mathbf{x}^i - \gamma\|^2 - \alpha]^+$$

なる関数であり,  $[w]^+ := \max\{w, 0\}$  と約束する.

本稿では, 定式化 (6) の解  $(\mathbf{Q}^*, \gamma^*)$  によって得られる楕円  $E(\mathbf{Q}^*, \gamma^*)$  を条件付き最小楕円 ( $\beta$ -Conditional Minimum Volume Ellipsoid; 以下,  $\beta$ -CMVE) と呼ぶ.

以下では所与のデータ  $X$  について次を仮定する:

**仮定 1**  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$  のアフィン包は  $\mathbb{R}^n$  を張る.

**定理 1** 仮定 1 の下で (6) は解を持つ. また, 最適解において, 制約  $F_\beta(\mathbf{Q}, \gamma, \alpha) \leq n$  は等号で満たされる.

実際, (6) の 1 本の微分不可能な制約は, 複数の微分可能な制約:

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{(1-\beta)m} \sum_{i=1}^m z_i &\leq n, \\ z_i &\geq \|\mathbf{Q}\mathbf{x}^i - \gamma\|^2 - \alpha, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

で置き換えられることに注意すると, 問題 (6) は微分可能な凸計画問題に帰着でき, 効率的な内点法アルゴリズムを構築することができる (詳細は [4]).

### 2.2 定式化の含意

以下では問題 (6) の幾何的な解釈を説明していく. このことを示すために, 仮定 1 の下で問題 (6) と等価な, 次の問題を導入しよう.

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\ln \det [\mathbf{Q}] \\ \mathbf{Q} \succ \mathbf{0}, \gamma \\ \text{subject to} & \phi_\beta(\mathbf{Q}, \gamma) \leq n. \end{cases} \quad (7)$$

ただし,

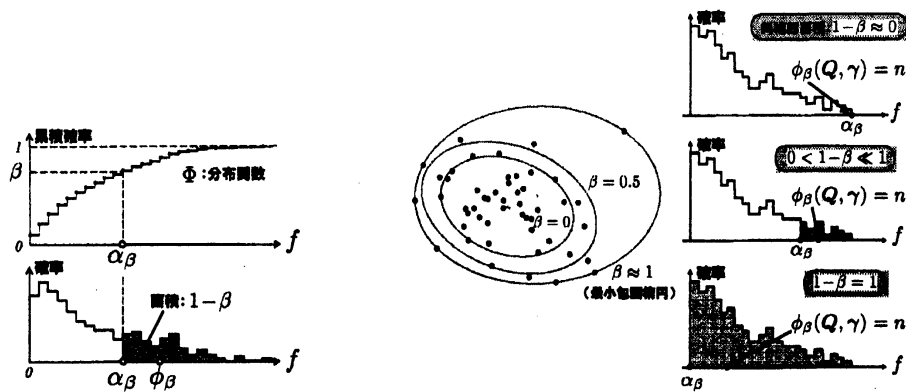
$$\phi_\beta(\mathbf{Q}, \gamma) := \min_{\alpha} F_\beta(\mathbf{Q}, \gamma, \alpha).$$

問題 (6) と問題 (7) の違いは, 制約式における  $\alpha$  を  $\mathbf{Q}, \gamma$  と同時に決定するか, 後で決定するかでしかない. 実際, [5] に拠れば, (6) と (7) は解が存在すれば等価である. そこで, 以下では関数値  $\phi_\beta$  の意味を解釈することで, 問題 (6) の含意を説明していきたい.

まず, 楕円  $E(\mathbf{Q}, \gamma)$  に対して, 点  $\mathbf{x}^i$  の楕円スコア  $f^i$  を以下の様に定義する ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$f^i(\mathbf{Q}, \gamma) := f(\mathbf{x}^i | \mathbf{Q}, \gamma) := \|\mathbf{Q}\mathbf{x}^i - \gamma\|^2.$$

このスコアは, 楕円  $E(\mathbf{Q}, \gamma)$  が決まれば, 各点  $\mathbf{x}^i$  毎に計算される数値であり, 中心  $\mathbf{Q}^{-1}\gamma$  から点  $\mathbf{x}^i$  への, 計量  $\mathbf{Q}^2$  の下での距離の 2 乗を示している. 特に, (5) で与えられる  $\mathbf{Q}^*$  で,  $1/m$  を  $1/(m-1)$  とした  $(\mathbf{Q}^*, \gamma^*)$  を用いれば, いわゆる (不偏推定量に基づく) マハラノビス距離の 2 乗に等しいことに注意しよう.



1. 分布関数  $\Phi$  (上) とヒストグラム (下) 2. 3つの  $\beta$ -CMVE と境界の位置 (イメージ図)

図 1:  $\phi_\beta$  と  $\beta$ -CMVE の境界

さて、固定された  $Q, \gamma$  に対して、楕円スコアの (経験的) 分布関数  $\Phi(\cdot | Q, \gamma)$  を考えよう:

$$\Phi(\alpha | Q, \gamma) := \frac{1}{m} |\{i \in \{1, \dots, m\} : f^i(Q, \gamma) \leq \alpha\}|.$$

さらに、これを用いて楕円スコアの  $\beta$ -分位点 (quantile) を以下の様に定義する ( $\beta \in [0, 1]$ ):

$$\alpha_\beta(Q, \gamma) := \min \{\alpha \geq 0 : \Phi(\alpha | Q, \gamma) \geq \beta\}.$$

図 1.1 は分布関数  $\Phi$  とそれに対応したヒストグラム、そして  $\beta$ -分位点  $\alpha_\beta$  を大雑把に描いたものである。この図が示すように、 $\beta$ -分位点  $\alpha_\beta$  は、分布する楕円スコアのうち、おおよそ下位  $100\beta\%$  (あるいは上位  $100(1-\beta)\%$ ) 目のスコアを示したものである。

一般に、 $\phi_\beta$  と  $\alpha_\beta$  の間に以下の関係が成り立つ ([5]):

$$0 \leq \alpha_\beta \leq E[f | f \geq \alpha_\beta] \leq \phi_\beta \leq E[f | f > \alpha_\beta]. \quad (8)$$

ただし、 $E[\cdot]$  は  $\Phi$  の下での期待値を表し、 $Q, \gamma$  への依存関係を省略してある。この関係式を眺めると、 $\phi_\beta$  が 2つの似通った条件付き期待値で挟まれていることが分かる。実際、もし分布関数が連続であれば、これら 2つの条件付き期待値は一致する。したがって、 $\phi_\beta$  は近似的に、 $\beta$ -分位点  $\alpha_\beta$  より大きな (つまり、上位  $100(1-\beta)\%$  に入っている) 楕円スコアの平均値を意味していると解釈できる (図 1.1)。

これより、定式化 (7)、ひいては (6) は、おおよそ、楕円スコアの上位  $100(1-\beta)\%$  の平均値を境界面が通る楕円のうち、最小体積を持つものを求める最適化問題であることが分かる。図 1.2 は 3つの  $\beta$  に対し、実際に計算した  $\beta$ -CMVE (左) と、 $\beta$  による境界面の位置の差異を描いたもの (右) である。とりわけ、 $\beta$  が十分 1 に近い場合と、 $\beta = 0$  の場合には、定式化 (6), (7) より  $\alpha$  を除くことが出来、その含意がより鮮明になる:

**命題 1** (i)  $\beta > 1 - \frac{1}{m}$  のとき、問題 (7) は最小包囲楕円問題 (2) と等価である。

(ii)  $\beta = 0$  のとき、問題 (7) は以下で定義される問題と等価である:

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\ln \det [Q] \\ \text{subject to} & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|Qx^i - \gamma\|^2 \leq n. \end{cases} \quad (9)$$

また、仮定 1 の下で (9) の解  $(Q^*, \gamma^*)$  は (5) で与えられる。

1つ目の命題は  $\beta$ -CMVE が最小包囲楕円問題 (例 1) の拡張になっていることを示している。これは最小包囲楕円問題 (2) の  $m$  本の制約が、

$$\max_{i=1, \dots, m} \{f^i(Q, \gamma)\} \leq n$$

と書き換えられることから、先に示した  $\phi_\beta$  の意味づけを通して直感的に納得できるであろう (図 1.2 右上)。

2 つ目の命題についても、 $\beta = 0$  のとき、 $\phi_\beta$  は (条件付きでない) 全体の平均値を意味することから納得できるものである (図 1.2 右下)。一方、その解 (5) については、正規分布の (対数) 尤度最大化 (4) と同じ解になっていることに注意されたい。このことから、CMVE は正規尤度最大化についての拡張にもなっており、裏を返せば、正規尤度最大化に対し、最小楕円という文脈での幾何的な解釈を与えることが分かる。

### 3. 条件付き尤度最大化

前節では正規分布の最尤法に対する、最小楕円による幾何的な解釈を示したが、本節では逆に、 $\beta$ -CMVE を尤度最大化の文脈に位置づけてみたい。まず、 $\beta \in [0, 1)$  に対し、次の一般化した尤度最大化問題を導入する：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & m \ln \det [\mathbf{Q}] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \alpha + \frac{1}{1-\beta} [f^i(\mathbf{Q}, \gamma) - \alpha]^+ \right) \\ \mathbf{Q} \succ \mathbf{O}, \gamma, \alpha \end{array} \right. \quad (10)$$

簡単に分かるように、 $\beta = 0$  とすれば、通常の正規尤度最大化 (4) と等価である。また、この問題は自明に次のように書き換えることができることに注意しておこう：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & -\ln \det [\mathbf{Q}] + \frac{1}{2} \left\{ \alpha + \frac{\mathbf{e}^\top \mathbf{z}}{(1-\beta)m} \right\} \\ \text{subject to} & z_i \geq \|\mathbf{Q}\mathbf{x}^i - \gamma\|^2 - \alpha, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} \succ \mathbf{O}. \end{array} \right. \quad (11)$$

以下の命題はこの問題と  $\beta$ -CMVE の等価性を示している。

**命題 2** 問題 (10) と問題 (6) は同じ楕円  $E(\mathbf{Q}, \gamma)$  を出力する。

ここで定式化 (10) について詳しく見ておこう。目的関数を指数関数  $\exp\{\cdot\}$  で変換すると、(10) は次の関数の最大化と同じであることが理解できる：

$$\prod_{i=1}^m \ell^i(\mathbf{Q}, \gamma).$$

ただし、

$$\ell^i(\mathbf{Q}, \gamma) := \begin{cases} \det[\mathbf{Q}] \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{1-\beta}(f^i(\mathbf{Q}, \gamma) - \alpha)\right)\right\} & \text{for } i \text{ such that } f^i(\mathbf{Q}, \gamma) > \alpha, \\ \det[\mathbf{Q}] \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha\right\} & \text{for } i \text{ such that } f^i(\mathbf{Q}, \gamma) \leq \alpha. \end{cases}$$

すなわち、全てのデータが等しく正規尤度に寄与するのではなく、 $\alpha$  より大きな楕円スコアを有する (つまり、より小さい尤度を有する) もののみが全体の尤度に寄与する、そんな条件付きの尤度関数を最大化することと等しい。実際、最適解において、 $\alpha$  は  $\beta$ -分位点  $\alpha_\beta$  の近似を与える ([5]) ことから、問題 (10)、ひいては  $\beta$ -CMVE を求める (6) は、下位  $100(1-\beta)\%$  の尤度を最大化する (その意味で max-min 最尤法の拡張としての) 条件付き最尤推定問題と見なせる。

### 4. 他の定式化との関連

#### 4.1 Sun-Freund[7] の拡張との関係

これまでに  $\beta$ -CMVE が最小包囲楕円 (2) の一般化になっていることを指摘したが、[7] では (2) を直接緩和する形で一般化した定式化が以下の形で示されている：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & -\ln \det [\mathbf{Q}] + \mathbf{P}\mathbf{e}^\top \mathbf{z} \\ \mathbf{Q}, \gamma, \mathbf{z} & \\ \text{subject to} & \|\mathbf{Q}\mathbf{x}^i - \gamma\|^2 \leq 1 + z_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} \succ \mathbf{O}. \end{array} \right. \quad (12)$$

ただし,  $P > 0$  はパラメータで,  $e := (1, \dots, 1)^T$ . (12) も  $\beta$ -CMVE 同様, 1つのパラメータを有している. 実際, 両者の間には次のような対応を見いだすことができる.

**命題 3** ( $Q^*, \gamma^*, \alpha^*, z^*$ ) を問題 (11) の解で,  $\alpha^* > 0$  とする. このとき,  $(\frac{1}{\sqrt{\alpha^*}} Q^*, \frac{1}{\sqrt{\alpha^*}} \gamma^*, \frac{1}{\alpha^*} z^*)$  は  $P = \frac{\alpha^*}{2(1-\beta)m}$  とした問題 (12) の解である.

実際, [7] では最小包囲楕円が外れデータ (例えば, 図 1.2 左の右上の点) に対し, 極めて敏感な解を出力する点を指摘し, それに対する一つの解決策として (12) を提示している. しかしながら,  $P$  は正数である以外に制限はなく, その意味合いも曖昧である. それに比べると,  $\beta$ -CMVE は, 外れデータに対する免疫を加えるという点では, 同様の効果を示すことが出来る上に, パラメータ  $\beta$  の意味合いは, 既に述べてきたように,  $\beta$ -分位点以上の期待値が境界面になるという, 幾何的な解釈を伴うという御利益がある点でより良いパラメータ化であると言える.

このようなパラメータの導入に関わる議論は, SVM の分野において  $C$ -SVM と  $\nu$ -SVM の差異として知られるものと同じである (詳細は [6] など).

## 4.2 MVE 推定との関係

本小節では冒頭に例 2 として挙げた問題と  $\beta$ -CMVE との関係について記しておく. まず以下の関係に注意する.

$$\{(Q, \gamma) : |\{i \in I : f^i(Q, \gamma) \leq n\}| \geq \lceil \beta m \rceil\} = \{(Q, \gamma) : \alpha_\beta(Q, \gamma) \leq n\}.$$

これより, MVE 推定の問題は以下のような非凸計画問題として書ける:

$$(MVE(\beta)) \quad \begin{cases} \text{minimize} & -\ln \det [Q] \\ \text{subject to} & \alpha_\beta(Q, \gamma) \leq n, \\ & Q \succ 0. \end{cases}$$

$\alpha_\beta$  と  $\phi_\beta$  の大小関係を与える (8) 式を考慮すると,  $\beta$ -CMVE の問題はこの非凸計画問題の上界を与える凸計画問題となっていることが分かる.

## 5. 多クラス判別への応用

節 2., 3. において,  $\beta$ -CMVE の求解が正規分布の最尤推定に対する拡張として見なすことができることを指摘した. 本節では, この事実から, 従来正規性の仮定に基づいて展開されてきた議論に  $\beta$ -CMVE を適用することを試みる. 具体的には, フィッシャーの判別分析として知られる方法論に対して, この一般化が結果を改善できるかどうかについて比較を示す.

ここで扱うのはいわゆる多クラス判別と呼ばれる問題で, 各データ  $x^i \in \mathbb{R}^n$  がいずれか 1つのクラス  $k^i \in K$  に属しているものとする. このとき, 手許にあるクラス・ラベル付きデータの集合 (学習データと呼ぶ)  $\{(x^i, k^i)\}$  から, なるべく良い判別規則を学習する (= 作成する) ことがここでの目標となる. ここで, 判別規則作成に用いなかったクラス・ラベル付きデータ (テスト・データと呼ぶ) を, 作成した判別規則に当てはめたときに, どれだけ正確にクラス・ラベルを言い当てることができるかという観点で判別規則の良し悪しを測る.

具体的には, 10 分割のクロス・バリデーションを用いる. この方法は手許にあるデータ集合を 10 分割し, そのうち 9 分割分のデータで判別規則を作成し, 残り 1 分割分のデータでその判別規則の予測精度をテストするということを, (全てのデータが 1 度テスト・データになるように) 10 回行い, その総計 (もしくは平均値) で評価するというものである.

本実験では  $\beta$ -CMVE を利用して, 以下の手順に従い判別規則を構成する:

表 1: テスト・データにおける誤判別率 [%]

データ名	K	サンプル数 (内訳)	n	CMVE			フィッシャー判別			ν-SVM[3]	
				(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	線形	RBF
Heart	2	270 (150, 120)	13	16.67	16.67	16.30	17.04	17.04	17.04	15.56	14.44
Liver	2	345 (145, 200)	6	33.04	32.75	29.86	42.03	42.61	29.86	38.50	24.92
Diabetes	2	768 (500, 268)	8	23.70	23.44	22.92	26.30	27.08	32.90	23.96	22.66
Cancer	2	569 (357, 212)	30	4.04	4.22	11.25	4.04	4.39	12.83	5.98	4.40
Cancer (3)	2	569 (357, 212)	3	3.69	3.51	2.99	3.87	4.22	8.61	7.04	6.86
Iris	3	150 (50, 50, 50)	4	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.67	1.33	1.33
Wine	3	178 (59, 71, 48)	13	0.00	0.00	0.00	0.56	0.56	1.69	7.81	7.81
Vehicle	4	846 (218, 212, 217, 199)	18	13.95	13.83	14.07	14.89	14.89	15.37	28.59	17.86

(a) ベイズ判別規則; (b) 正規尤度基準; (c) 変形マハラノビス距離基準; “Cancer (3)” は既存研究を参考に属性 no.2, 24, 25 のみを用いたもの

1. 各クラス  $k$  毎に  $\beta_k$  を固定し, 各クラスの学習データ  $\{(\mathbf{x}^i, k^i) : k^i = k\}$  に対し,  $\beta_k$ -CMVE を求める.
2. 全てのクラスの  $\beta_k$ -CMVE が求まったら, 次の (a), (b), (c), いずれかの基準に則って, テスト・データ  $\bar{\mathbf{x}}$  のクラス・ラベル  $\bar{k}$  を予測する.

(a) ベイズ判別基準

$$\bar{k} \in \arg \max_{k \in K} \left\{ \ln \det[\mathbf{Q}^k] - \frac{1}{2} f(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{Q}^k, \gamma^k) + \ln m_k \right\}.$$

ただし,  $m_k$  は学習に用いたクラス  $k$  のサンプル・データ数. すなわち,  $m_k = |\{(\mathbf{x}^i, k^i) : k^i = k\}|$ .

(b) 正規尤度基準

$$\bar{k} \in \arg \max_{k \in K} \left\{ \ln \det[\mathbf{Q}^k] - \frac{1}{2} f(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{Q}^k, \gamma^k) \right\}.$$

(c) 変形マハラノビス距離 (楕円スコア) 基準

$$\bar{k} \in \arg \min_{k \in K} f(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{Q}^k, \gamma^k)$$

本実験では, 表 1 に示したデータ・セットに対し, 全てのクラス  $k$  について, 11 個の  $\beta_k$ -CMVE ( $\beta_k = 0.0, 0.05, 0.15, \dots, 0.95$ ) を計算し, その全ての組み合わせに関するクロス・バリデーションを行った. 以下の結果表示ではその組み合わせの中で最良の結果のみ示している.

表 1 は上記で述べた  $\beta$ -CMVE を用いた判別, フィッシャーの判別,  $\nu$ -SVM の 3 つの手法のテスト・データにおける誤判別率をまとめたものである. ここで言うフィッシャーの判別とは, いわゆる線形判別ではなく, 上述の 3 つの判別基準 (a)-(c) に, (5) で  $1/m_k$  を  $1/(m_k - 1)$  として計算した  $(\mathbf{Q}^k, \gamma^k)$  を採用したものを指している.  $m_k$  が大きい場合には (5) とほぼ違いがなくなることから, フィッシャー判別は近似的に  $\beta$ -CMVE の特殊ケースと見なせることに注意しよう.

一方,  $\nu$ -SVM の結果は LIBSVM[3] に基づくものであり, 線形, および RBF カーネルを採用した<sup>1</sup>. パラメータ  $\nu$  については, CMVE の  $\beta$  と同様に, 11 種類, RBF カーネルについては, カーネルのパラメータ  $\gamma$  についても  $\gamma = 2^{-25}, 2^{-21}, \dots, 2^{-7}$  の 10 個について計算し最良の結果を示してある. ただし, LIBSVM の制約から, 全てのクラス共通の  $\nu, \gamma$  を採用している.

<sup>1</sup>カーネルは SVM が高度に非線形な判別を行うことを可能にする仕組みであり, RBF カーネルはその中でも最も有名なもので, 事前に固定すべきパラメータを 1 つ有する. 一方, 線形カーネルとはカーネルを適用しないことと同義である.



表から、ほとんど全てのデータ、および判別基準で、CMVEの結果がフィッシャー判別の結果を上回っていることが分かる。また、いくつかのデータセットに対しては $\nu$ -SVMの結果をも凌いでいる。例えば、WineデータについてはCMVEで適当に $\beta$ を変えることで、0%の事後的な予測誤差を達成できている。これだけの結果で圧倒的な優位性を主張することはできないが、一般に通常のデータが厳密に正規分布に従うとは考えられないことから、本稿で示した一般化によって、正規性からの逸脱に対していくらかの対応が可能になっている様子がうかがえる。

また、SVMはRBFなどの非線形カーネルを用いることで、高度に非線形な判別ルールを作ることができるが、その結果はパラメータのチューニングに大きく依存し、場合によってはオーバー・フィッティングすることもある。その意味ではフィッシャー判別や、それを少し拡張した本方法論の様に、予め領域の形状に強い（しかしながらそれなりに記述力を保持した）制限を掛けておく、古典的な方法論も捨てがたい側面を有しているように思える。

## 参考文献

- [1] C. L. Blake and C. J. Merz, UCI Repository of machine learning databases, 1998. [<http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLRepository.html>].
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] C. C. Chang and C. J. Lin, LIBSVM : A Library for Support Vector Machines, 2001. [<http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>].
- [4] J. Gotoh and A. Takeda, "Conditional Minimum Volume Ellipsoid with Application to Multiclass Discrimination," 社会システム・マネジメント専攻 Discussion Paper Series, (2006), 筑波大学.
- [5] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Conditional value-at-risk for general loss distributions," *Journal of Banking and Finance*, **26** (2002), 1443–1471.
- [6] B. Schölkopf and A.J. Smola, *Learning with Kernels*, The MIT Press, 2002.
- [7] P. Sun and R. M. Freund, "Computation of Minimum Volume Covering Ellipsoids," *Operations Research*, **52** (2004), 690–706.
- [8] S. M. J. Tax and R. P. W. Duin, "Support vector domain description," *Pattern Recognition Letters*, **20** (1999), 1191–1199.
- [9] 宮川雅巳, 『統計技法』, 共立出版株式会社, 1998.